Estadística Empresarial II

Grado en ADE USC

Apuntes

1. PROBABILIDAD

La **Inferencia Estadística** busca estimar o predecir el comportamiento de una población basándose en el análisis de una muestra representativa. El desarrollo de la inferencia estadística es imposible sin Cálculo de Probabilidades, que sirve de unión entre la Estadística Descriptiva y la Inferencial. Definiciones:

Probabilidad: una medida de la aleatoriedad o posibilidad de ocurrencia de los acontecimientos.

Acontecimientos: son los resultados de la realización de un experimento.

Fenómenos determinísticos: aquellos en los que se sabe cuál será el resultado antes de la realización.

Fenómenos aleatorios: aquellos cuyo resultado no es posible conocer con total certeza con anterioridad.

Espacio muestral: conjunto de todos los resultados posibles de la realización de un fenómeno.

TEORÍAS DE LA PROBABILIDAD

Teoría Clásica (Laplace):

$$P(A) = \frac{resultados\ favorables}{resultados\ posibles}$$

Teoría Frecuentista (Von Mises):

$$P(A) = f_r$$

Teoría Subjetiva (Ramsey, Savage): define la probabilidad de un acontecimiento como el grado de certeza que un evaluador tiene sobre la ocurrencia de dicho acontecimiento, para un nivel dado de evidencia empírica. Se basa en las teorías clásicas y frecuentista pero sortea el principio de repetición de fenómenos bajo idénticas condiciones.

Teoría Loxicista (Keynes): define la probabilidad como el grado de creencia que, dada una evidencia empírica existente, es lógico o racional mantener sobre la posibilidad de ocurrencia de dicho acontecimiento. El hecho de que sea un grado de creencia lógica indica que no depende de cada individuo, sino que está relacionado con los niveles de conocimiento existente.

Teoría Axiomática (Kolmogorov): dice que los acontecimientos pueden clasificarse en simples y compuestos (grupos de resultados elementales, como la unión, intersección, etc). El espacio muestral es el conjunto de posibles resultados elementales de un fenómeno aleatorio: $\Omega = \{O, X\}$ $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$

Ejemplo: si tiramos un dado, expresa el suceso A (sacar impar), B (sacar un número inferior a 4) y C (sacar par pero que no sea un 2).

Operaciones con sucesos

Unión: *AUB={1,2,3,5}*

Intersección *A∩B={1,3}*

Complementario: $\bar{A}$*={2,4,6}*

Diferencia *A-B={5}*

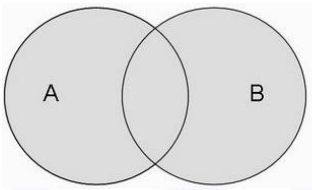
Ω= {1,2,3,4,5,6}

A= {1,3,5}

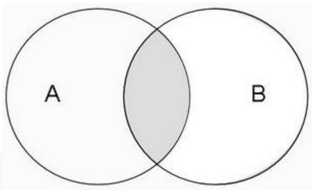
B= {1,2,3}

C={4,6}

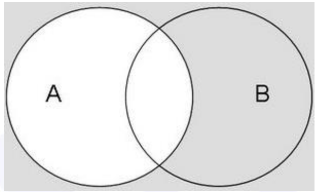
Representación gráfica (Diagramas de Venn):



$A \cup B$



$A \cap B$



$\bar{A}$

Axiomas de probabilidad:

1.- La probabilidad nunca puede ser negativa. $P(A) \geq 0 \;\; si \;\; A \, \epsilon \, \sigma - \acute{a}lgebra$

2.- La probabilidad de que ocurra el espacio muestral es uno. $P(\,\Omega) = 1$

3.- Si tenemos dos sucesos disjuntos (que no se pueden dar a la vez) su unión es la suma de las probabilidades individuales. $P(A \cup B) = \; P(A) + P(B) \;\; si \;\; P(A \cap B) = 0$

OPERACIONES CON PROBABILIDAD

$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

$P(A \cup B) = \; P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$P(A - B) = P(A \cap \bar{B}) = P(A) - P(A \cap B)$

$P(\bar{A} \cap \bar{B}) = P(\overline{A \cup B}) = 1 - P(A \cup B)$

$P(\bar{A} \cup \bar{B}) = P(\overline{A \cap B}) = 1 - P(A \cap B)$

Ejemplo: si A i B son dos sucesos con P(A)=3/8, P(B)=4/8 i P(A∩B)=2/8

a) $P(A \cup B)$

b) $P(\bar{A})$

c) $P(\bar{A} \cap \bar{B})$

d) $P(A \cap \bar{B})$

e) $P(A \cup \bar{B})$

PROBABILIDAD CONDICIONADA

$$P\left(A/_B\right) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Ejemplo: En una clase el 40% tienen el pelo rubio, el 25% los ojos azules y el 15% las dos cosas.

a) Si el pelo es rubio, ¿qué probabilidad hay de que también tenga los ojos azules?

b) Si tiene los ojos azules, ¿qué probabilidad hay de que no tenga el pelo rubio?

Ejemplo: Con los siguientes datos, calcula:

	EC	EU	
Hombre	11	4	15
Mujer	11	9	20
	22	13	35

a) $P(M)$

b) $P(EC)$

c) $P(H \cap EC)$

d) $P(EC/M)$

e) $P(EU \cup M)$

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD CONJUNTA

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \dots) = P(A_1) \cdot P\left({}^{A_2}/_{A_1}\right) \cdot P\left({}^{A_3}/_{A_1 \cap A_2}\right) \dots$$

Diagrama del árbol:

Ejemplo: si en tenemos 6 bolas en un bombo, 2 son blancas y 4 negras, calcula la probabilidad de que salga la primera blanca, la segunda negra y la tercera también negra.

TEOREMA DE LA PROBABILIDAD TOTAL

$$P(B) = P\left({}^{B}/_{A_1}\right) \cdot P(A_1) + P\left({}^{B}/_{A_2}\right) \cdot P(A_2) \dots + P\left({}^{B}/_{A_n}\right) \cdot P(A_n)$$

Ejemplo: en un examen de Estadística el 50% no van a ninguna academia, el 30% van a la academia Estadistix y el 20% a otras academias. La probabilidad de aprobar de los que no van a ninguna academia es de un 60%, de los que van a Estadistix es del 95% y de los que van a otras academias es del 70%. ¿Qué probabilidad tienen los alumnos de aprobar?

TEOREMA DE BAYES

$$P\left({}^{A_1}/_{B}\right) = \frac{\mathrm{P(A \cap B)}}{P(B)} = \frac{P\left({}^{B}/_{A_1}\right) \cdot P(A_1)}{P(B)} = \frac{P\left({}^{B}/_{A_1}\right) \cdot P(A_1)}{P\left({}^{B}/_{A_1}\right) \cdot P(A_1) + P\left({}^{B}/_{A_2}\right) \cdot P(A_2) \ldots + P\left({}^{B}/_{A_n}\right) \cdot P(A_n)}$$

Ejemplo: en caso anterior, ¿cuál es la probabilidad de que si has aprobado, hayas ido a Estadistix?

INDEPENDENCIA DE SUCESOS

$Independencia\ si$: $P\left({}^{A}/_{B}\right) = \mathrm{P(A)}$ o $P\left({}^{B}/_{A}\right) = \mathrm{P(B)}$ o $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$

2. DISTRIBUCIÓN DE PROBABILIDAD

Variables aleatorias: son herramientas que asignan números a los resultados de los fenómenos, que pueden ser cualitativos o cuantitativos. Los primeros no permiten el desarrollo y las operaciones matemáticas y para poder trabajar a partir de estos es necesario expresarlos de forma cuantitativa.
Las variables aleatorias se clasifican como:

Variables discretas: Aquellas que toman un número finito o infinito numerable de valores.

Variables continuas: aquellas que pueden tomar un número infinito no numerable de valores.

VARIABLES ALEATORIAS DISCRETAS
Función de cuantía o de probabilidad P(x):

$$p(x) \geq 0 \quad \sum p(x) = 1 \quad p(X = x) = \begin{cases} p(x_1)\ si\ \ x = 1 \\ p(x_2)\ si\ \ x = 2 \\ \quad \ldots \end{cases}$$

Función de distribución F(x):

$$F(x) = p(X \leq x) \quad F(x_n) = 1 \quad F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 0 \\ F(x_1) & si\ \ 0 \leq x < x_i \\ & \ldots \end{cases}$$

$$p(x_1 < x \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

Esperanza matemática:

$$E(X) = \mu_x = \sum x \cdot p(x)$$

Varianza:

$$V(X) = \sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Ejemplo clase:

VARIABLES ALEATORIAS CONTÍNUAS

La función de densidad f(x):

$$f(x) \geq 0 \qquad \int_a^b f(x)dx = 1 \qquad f(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 0 \\ f(x_1) & si\ \ 0 \leq x < x_1 \\ & \dots \end{cases} \qquad p(x_1 \leq x \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

La función de distribución F(x):

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_a^x f(x)\, dx \quad F(x_n) = 1 \quad F(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 0 \\ F(x_1) & si\ \ 0 < x < x_1 \\ & \dots \end{cases}$$

$$p(x_1 < x < x_2) = F(x_2) - F(x_1) \qquad F(x)' = f(x)$$

Esperanza matemática:

$$E(X) = \mu_x = \int_a^b x \cdot f(x)dx$$

Varianza:

$$V(X) = \sigma_x^2 = E(X^2) - [E(X)]^2$$

Ejemplo: calcula la esperanza y la varianza de una variable continua con función de densidad:

$$\frac{x^2}{80}\ \ si\ \ 0 \leq x \leq 6$$

Ejemplo: con la siguiente función de densidad: $f(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2 - kx & 0 < x < 1 \\ 0 & x > 1 \end{cases}$

a) Calcula el valor de k

b) La probabilidad $P(0{,}2 < x < 0{,}5)$

c) La E(x) i V(x)

PROPIEDADES DE LA ESPERANZA Y LA VARIANZA

$E(a) = a$

$E(aX) = aE(X)$

$E(a + X) = a + E(X)$

$E(X + Y) = E(X) + E(Y)$

$E(X - Y) = E(X) - E(Y)$

$E(XY) = E(X) \cdot E(Y)\ si\ son\ independientes$

$V(a) = 0$

$V(aX) = a^2V(X)$

$V(a + X) = V(X)$

$V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2COV(XY)$

$V(X - Y) = V(X) + V(Y) - 2COV(XY)$

Momentos respecto al origen: $a_r = \frac{\sum x_i^r \cdot n_i}{N}$ $\boldsymbol{a_1} = \boldsymbol{\mu_x} = \frac{\sum \boldsymbol{x_i^1} \cdot \boldsymbol{n_i}}{\boldsymbol{N}}$ $a_2 = \frac{\sum x_i^2 \cdot n_i}{N}$ …

Momentos respecto a la media: $m_r = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^r \cdot n_i}{N}$ $m_1 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^1 \cdot n_i}{N}$ $\boldsymbol{m_2} = \boldsymbol{\sigma_x^2} = \frac{\sum (\boldsymbol{x_i} - \bar{\boldsymbol{x}})^2 \cdot \boldsymbol{n_i}}{\boldsymbol{N}}$

DISTRIBUCIÓN CONJUNTA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

La distribución conjunta de las variables aleatorias discretas X e Y es la función p (x, y) que expresa la probabilidad simultánea que X tome el valor x e Y tome el valor y

$$p(x,y) = P((X,Y) = (x,y)) = P(\{X = x\} \cap \{\, Y = y\})$$

Propiedades:

- $0 \leq p(x,y) \leq 1$ para todos los valores de x e y
- $\sum_x \sum_y p(x,y) = 1$

Trabajaremos con el ejemplo donde X es "Suma de los dos dados" e Y "Resto del primer dado menos el segundo". Los diferentes valores de la variable (X, Y) serían:

ESPACIO MUESTRAL

	1	2	3	4	5	6
1	$(2,0)$	$(3,-1)$	$(4,-2)$	$(5,-3)$	$(6,-4)$	$(7,-5)$
2	$(3,1)$	$(4,0)$	$(5,-1)$	$(6,-2)$	$(7,-3)$	$(8,-4)$
3	$(4,2)$	$(5,1)$	$(6,0)$	$(7,-1)$	$(8,-2)$	$(9,-3)$
4	$(5,3)$	$(6,2)$	$(7,1)$	$(8,0)$	$(9,-1)$	$(10,-2)$
5	$(6,4)$	$(7,3)$	$(8,2)$	$(9,1)$	$(10,0)$	$(11,-1)$
6	$(7,5)$	$(8,4)$	$(9,3)$	$(10,2)$	$(11,1)$	$(12,0)$

FUNCIÓN DE PROBABILIDAD CONJUNTA

$X \backslash Y$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	$f_X(x)$
2	0	0	0	0	0	$1/36$	0	0	0	0	0	$1/36$
3	0	0	0	0	$1/36$	0	$1/36$	0	0	0	0	$2/36$
4	0	0	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$1/36$	0	0	0	$3/36$
5	0	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$1/36$	0	0	$4/36$
6	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$5/36$
7	$1/36$	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$1/36$	$6/36$
8	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$5/36$
9	0	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$1/36$	0	0	$4/36$
10	0	0	0	$1/36$	0	$1/36$	0	$1/36$	0	0	0	$3/36$
11	0	0	0	0	$1/36$	0	$1/36$	0	0	0	0	$2/36$
12	0	0	0	0	0	$1/36$	0	0	0	0	0	$1/36$
$f_Y(y)$	$1/36$	$2/36$	$3/36$	$4/36$	$5/36$	$6/36$	$5/36$	$4/36$	$3/36$	$2/36$	$1/36$	1

$$p(x,y) = \begin{cases} \dfrac{1}{36} & si\ x, y\ forma\ parte\ del\ espacio\ muestral \\ 0 & en\ cualquier\ otro\ caso \end{cases}$$

La última fila y columna son las **probabilidades marginales**

Este dosier está hecho para seguir la clase de prueba.

Si te apuntas al curso te enviaremos por correo el dosier entero con todos los temas que faltan, ejercicios y exámenes de años anteriores

Más información en:

www.estadistix.com

Y si tienes cualquier consulta,
escríbenos un whatsapp al 644310902